

Δέκατο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(H) \quad y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

όπου p μια πραγματική σταθερά.

(i) Να βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της παραπάνω γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (H) γύρω από το $x_0 = 0$.

(ii) Ως εφαρμογή, να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2xy' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(iii) Στην (i) για $p = 0$ να δώσετε τις εκφράσεις των λύσεων που βρήκατε, και στη συνέχεια να επιλύσετε την εξίσωση (H) με έναν διαφορετικό τρόπο από αυτόν που εφαρμόσατε στην (i).

Θέμα 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0,$$

όπου p μια πραγματική σταθερά.

(i) Να αποδείξετε ότι με την αντικατάσταση $y = ze^{-\frac{x^2}{4}}$, η διαφορική εξίσωση (E) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$(E') \quad z'' - xz' + pz = 0$$

(ii) Αν $p = m \in \mathbb{N}$,

(a) να αποδείξετε ότι η (E') έχει πολυωνυμική λύση.

(b) συμβολίζοντας για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $(Q_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ την ακολουθία των πολυωνυμικών λύσεων της εξίσωσης (E') (όταν $p = m$) να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} Q_m(x) Q_n(x) dx,$$

όταν $n \neq m$. Τι παρατηρείτε για την ακολουθία των πολυωνυμικών λύσεων;

(c) να εξετάσετε αν η εξίσωση (E) έχει συγκλίνουσες λύσεις προς το 0, όταν το $x \rightarrow +\infty$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ